

АНОТАЦІЯ

Назва дисципліни / освітнього компонента	Функціональні рівняння та методи їх розв'язування
Освітня програма	Середня освіта (Математика)
Компонент освітньої програми	Вибірковий
Загальна кількість кредитів та кількість годин для вивчення дисципліни	3 кредити / 90 годин
Вид підсумкового контролю	Залік
Мова викладання	Українська
Викладач	Присяжнюк Ігор Михайлович, канд. техн. наук, доцент.
CV викладача на сайті кафедри	https://sites.google.com/d/141akpP4U18L8pw3LUD9CRoCUx7sRr_SZ/p/1Ae67ymxhaOCprQ3Di8LxhAiAMF34D2xD/edit
E-mail викладача	igor.prysiazhniuk@rshu.edu.ua

Навчальна дисципліна «**Функціональні рівняння та методи їх розв'язування**» належить до вибіркових компонентів циклу професійної підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. Вона присвячена вивченню рівнянь, у яких невідомими є функції, а співвідношення між ними задаються для довільних значень аргументів з певних областей. У межах курсу розглядаються класичні рівняння Коші, Єнсена, Пексідера, Даламбера, методи їх розв'язування в різних класах функцій (неперервних,

монотонних, обмежених), а також техніка ітераційних процесів та функціональних підстановок.

Актуальність дисципліни зумовлена широким застосуванням функціональних рівнянь у сучасній математиці, теоретичній фізиці, економіці (теорія корисності) та теорії прийняття рішень. Апарат функціональних рівнянь є незамінним при аксіоматичній побудові математичних теорій, дослідженні властивостей елементарних функцій та аналізі динамічних систем. Вивчення курсу дозволяє сформувати у студентів високий рівень логічного мислення, здатність до нестандартного аналізу математичних структур та навички розв'язування складних задач, що потребують глибокого розуміння фундаментальних властивостей функцій (ін'єктивності, неперервності, опуклості).

Метою викладання навчальної дисципліни «Функціональні рівняння та методи їх розв'язування» є формування у студентів системи теоретичних знань про методи розв'язування функціональних рівнянь та нерівностей, а також розвиток навичок дослідження функціональних залежностей в інваріантній формі.

Основними завданнями вивчення дисципліни є ознайомлення з основними типами функціональних рівнянь та класичними методами їх аналізу (метод Коші, метод ітерацій, метод диференціювання), вивчення умов існування та єдиності розв'язків у різних функціональних просторах, опанування техніки «елементарних підстановок» для визначення властивостей шуканих функцій, набуття навичок зведення складних функціональних залежностей до базових форм (рівнянь Коші або Пексідера), вивчення зв'язку між функціональними рівняннями та суміжними розділами математики (диференціальними рівняннями, теорією груп, математичним аналізом).

У результаті вивчення дисципліни здобувачі вищої освіти мають **знати:**

- **Класифікацію та типи рівнянь:** Основні класи функціональних рівнянь (Коші, Єнсена, Пексідера, Даламбера, Лобачевського) та відмінності між ними.
- **Фундаментальні розв'язки:** Загальні розв'язки чотирьох класичних рівнянь Коші (адитивного, показникового, логарифмічного та степеневого) у класі неперервних функцій.
- **Умови єдиності:** Роль додаткових умов (неперервність у точці, монотонність, локальна обмеженість) для виключення розривних розв'язків (розуміння суті базису Гамеля).
- **Властивості функцій у рівняннях:** Поняття ін'єктивності, сюр'єктивності, парності/непарності та періодичності як ключових характеристик, що впливають безпосередньо зі структури рівняння.

-Метод ітерацій: Поняття ітерації функції, нерухомої точки та циклів, а також принципи побудови ітераційних послідовностей для розв'язування рівнянь вигляду $f(f(x)) = g(x)$.

вміти:

- **Застосовувати метод підстановок:** Ефективно вибирати значення аргументів (заміна змінних на 0, 1, -x, f(x) тощо) для спрощення рівняння та знаходження значень функції в окремих точках.

- **Досліджувати характер функції:** Визначати ін'єктивність або сюр'єктивність шуканої функції безпосередньо з функціонального співвідношення для звуження пошуку розв'язків.

- **Зводити складні форми до канонічних:** Використовувати логарифмування, експоненціювання або заміну аргументу/функції для зведення заданого рівняння до відомих типів (наприклад, до адитивного рівняння Коші).

- **Використовувати апарат аналізу:** Застосовувати диференціювання за однією зі змінних (для гладких функцій) або метод граничного переходу для знаходження розв'язку.

- **Розв'язувати ітераційні рівняння:** Знаходити загальний вигляд n-ї ітерації для лінійно-дробових та інших елементарних функцій при розв'язуванні композиційних рівнянь.

Зміст навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Класичні функціональні рівняння та методи їх розв'язування

Тема 1. Поняття функціонального рівняння. Класифікація функціональних рівнянь. Елементарні методи розв'язування: метод підстановок, використання симетрії змінних, дослідження області значень та фіксованих точок.

Тема 2. Адитивне рівняння Коші $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Розв'язування рівняння Коші на множині раціональних чисел. Поняття про розривні розв'язки та базис Гамеля.

Тема 3. Варіації рівняння Коші: показникове, логарифмічне та степеневе рівняння. Методи зведення складних рівнянь до адитивного рівняння Коші.

Тема 4. Рівняння Пексідера та його загальний розв'язок. Системи функціональних рівнянь. Застосування підстановок для відокремлення змінних.

Тема 5. Функціональне рівняння Єнсена $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Зв'язок між рівнянням Єнсена та поняттям опуклості функції. Застосування до доведення класичних нерівностей.

Змістовий модуль 2. Ітераційні, тригонометричні та диференційовані рівняння

Тема 6. Тригонометричні функціональні рівняння. Рівняння Даламбера (рівняння косинуса) та рівняння Лобачевського. Методи знаходження неперервних розв'язків.

Тема 7. Метод ітерацій у функціональних рівняннях. Ітераційні послідовності. Рівняння вигляду $f(f(x)) = g(x)$ та методи пошуку дробових ітерацій функції.

Тема 8. Функціональні рівняння, що містять вільні змінні під знаком функції. Дослідження властивостей ін'єктивності, сюр'єктивності та монотонності шуканих функцій.

Тема 9. Зв'язок функціональних рівнянь з диференціальними та інтегральними рівняннями. Метод диференціювання за параметром для знаходження гладких розв'язків.

Тема 10. Функціональні рівняння в задачах математичних олімпіад та наукових дослідженнях. Побудова математичних моделей на основі функціональних співвідношень. Аналіз стійкості розв'язків.